Université Paris-Sud, Centre d'Orsay
DEUG Sciences - C3 MIAS CPGE - Session de juin 2005
Épreuve de Mathématiques

Durée : trois heures
Les documents sont interdits, les calculatrices autorisées.
Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

Déterminer la valeur du paramètre réel a pour laquelle

$$\frac{\ln\left(1+2x+2x^2+ax^3\right)-2x}{x^4}$$

a une limite finie lorsque x tend vers 0. Déterminer alors cette limite.

Exercice 2

On se place dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormal. Soit α un paramètre réel tel que $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer a pour que la parabole d'équation $y = ax^2 - 1$ passe par le point de coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.
2. Soit D le domaine du plan ainsi défini
$$D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ et } y \geqslant ax^2-1\right\}.$$
Dessiner ce domaine et en calculer l'aire.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à n.

On définit un endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi :

$$u(P) = \sum_{j=0}^{n} X^j \int_0^1 t^j P(t)\ \mathrm{d}\,t.$$

1. Montrer que, si $P \in \ker u$, on a $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}\,t = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$.
En déduire que l'on a $\ker u = \{0\}$.
2. Écrire la matrice H_n de u dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
3. La matrice H_n est-elle inversible ?

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2}\ \mathrm{d}\,x$ existe.
2. Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on pose
$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\frac{x^{3j-2}}{j}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, on a
   $$S_{2n}(x) \leqslant \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2} \leqslant S_{2n+1}(x).$$
   (b) La convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^{j-1}\frac{x^{3j-2}}{j}$ est-elle uniforme sur $[0,1]$? Est-elle normale ?
   (c) Exprimer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(3n-1)}$ au moyen de I.
3. Décomposer la fraction $\displaystyle\frac{1}{x(3x-1)}$ en éléments simples. En déduire une expression de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{3}}$ faisant intervenir I.
4. Calculer l'intégrale I.